

Zadání 3

Úloha 1. Pro jaké hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je funkce

$$u(x, y) = \alpha x^4 - 6x^2 y^2 - \beta y^4 - 3y$$

harmonická na \mathbb{R}^2 ?

Úloha 2. Uvažme funkci

$$v(x, y) = -(e^x \cos y + e^y \cos x + xy).$$

a) Pro jaké hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je funkce

$$f(z) = (1+x) \sin y + \alpha e^y \ln(1+x) + \beta y^2 + iv(x, y),$$

kde klasicky $z = x + iy$, diferencovatelná na množině $M = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$?

b) Nalezněte všechny funkce $u(x, y)$ tak, aby funkce $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ byla celistvá.

Úloha 3. Určete algebraický tvar čísla $\ln(1-i) + \cos(2-4i)$.

Připomenutí z přednášky: Pro $z \neq 0$ je $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ a pro $z \in \mathbb{C}$ je $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

Hint: Hodnotu $\cos(2-4i)$ lze kompaktně vyjádřit pomocí hyperbolických funkcí $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ a $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$.